金利の期間構造と確率偏微分方程式(経済の数理解析)

楠岡, 成雄

数理解析研究所講究録
987 巻 1997 年 138-141

金利の期間構造と確率偏微分方程式

楠岡成雄 (東京大学大学院数理科学研究科)

1 Introduction

ここでは、forward rate (先物金利) の確率過程モデルについて考察する。$p(t,T)$, $0 \leq t \leq T$, は満期時刻が T でそのときの配当が 1 であるようなゼロクーポン債の時刻 t での価格を表すとする。この時 $p(t,T)$ は2個のパラメータをもつ確率過程と見なせる。forward rate $f(t,T)$ は $f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log p(t,T)$, $0 \leq t \leq T$ で与えられる。確率過程 $r(t,x)$, $t, x \geq 0$, を $r(t,x) = f(t,t+x)$ で定める。この時 グラフ $\{r(t,x); x \geq 0\}$ は金利曲線としばしば呼ばれる。ここでは $r(t,x)$ は (t,x) につき連続と考える。また、発行されている債券の期間には通常ある上限がもうけられているので、ある $\ell > 0$ が存在して $r(t,\cdot)$ は $[0,\ell]$ のうえでのみ定義されていると仮定する。この時 $p(t,T)$ と $r(t,x)$ の関係は

$$p(t,T) = \exp(-\int_0^{T-t} r(t,x)dx), \qquad 0 \leq t \leq T \leq t+\ell.$$

で与えられる。ここで基礎となる確率測度はリスク中立的であると仮定する。すると、no arbitarge を仮定すれば、確率過程 $\{\exp(-\int_0^t r(s,0)ds)p(t,T);\ T-\ell \leq t \leq T\}$ はマルチンゲールでなくてはならない。Musiela [2] により $r(t,x)$ はある SPDE (確率偏微分方程式) を満たすことが指摘されている。. ここでの目的は金利過程 $r(t,x)$ に対するマルコフ型の SPDE としてどのようなものが考えられるかを考察することにある。

2 一般論

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, P)$ はスタンダードな仮定を満たすフィルター付き確率空間とする。$r(t,x)$, $M(t,x)$, $V(t,x,y)$, $t \in [0,\infty)$, $x,y \in [0,\ell]$ は確率変数で以下の条件を満たすものとする。

(A-1) $r(t,x)$, $M(t,x)$, $V(t,x,y)$, $x,y \in [0,\ell]$, は $\mathcal{F}_t$-可測, $t \in [0,\infty)$, で、$M(0,x) = 0$, $V(0,x,y) = 0$, $x,y \in [0,\ell]$.

(A-2) $r(t,x)$, $M(t,x)$, $V(t,x,y)$ は $(t,x,y) \in [0,\infty) \times [0,\ell]^2$ について連続。

(A-3) 各 $x \in [0,\ell]$ に対して、$\{M(t,x)\}_{t\in[0,\infty)}$ は局所マルチンゲールでかつ

$$[M(\cdot,x), M(\cdot,y)]_t = \int_0^t V(s,x,y)ds, \qquad t \geq 0, x,y \in [0,\ell]$$

が成り立つ。
(A-4) 任意の $\varphi \in C_0^\infty((0,\ell))$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \varphi(x)r(t,x)dx - \int_0^\ell \varphi(x)r(0,x)dx \\ = -\int_0^t ds\int_0^\ell \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)r(s,x)dx + \int_0^\ell dx\varphi(x)M(t,x) \\ + \int_0^t ds\int_0^\ell \varphi(x)\tilde{V}(s,x)dx, \qquad t\geq 0,\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、$\tilde{V}(t,x) = \int_0^x V(t,x,y)dy$ である。

注意. $\{M(t,\cdot)\}_{t\in[0,\infty)}$ は $L^2((0,\ell))$ 値 局所マルチンゲールと見なせる。また $V(t,x,y) = V(t,y,x)$ が成り立つ。

この時次の結果が成立する。

定理 2.1 各 $T>0$ に対して

$$\exp(-\int_0^t r(s,0)ds - \int_t^T r(t,s-t)ds), \qquad 0\vee(T-\ell)\leq t\leq T,$$

は局所マルチンゲールとなる。

上記の定理より次がわかる。

系 2.2 $r(t,x)\geq 0$, $(t,x)\in[0,\infty)\times[0,\ell]$ と仮定すれば、各 $T>0$ に対し

$$\exp(-\int_0^t r(s,0)ds - \int_t^T r(t,s-t)ds), \qquad 0\vee(T-\ell)\leq t\leq T,$$

はマルチンゲールとなる。特に,

$$\exp(-\int_t^T r(t,s-t)ds) = E[\exp(-\int_t^T r(s,0)ds) \mid \mathcal{F}_t], \qquad 0\vee(T-\ell)\leq t\leq T.$$

上記の定理より $r(t,x)$ を金利とみなした場合、no arbitrage の仮定が満たされることがわかる。

期間の上限 ℓ を設けたのでそこでの境界条件が必要となる。これについて次のような結果が成り立つ。

命題 2.3 連続な確率過程 $\{\varepsilon(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が次の条件を満たすとする。

$$\int_0^t h^{-1}(r(s,\ell)-r(s,\ell-h))ds \to \varepsilon(t), \qquad as\, h\downarrow 0, \qquad t\geq 0.$$

この時

$$r(t,\ell) = r(0,\ell) + \varepsilon(t) + M(t,\ell) + \int_0^t \tilde{V}(s,\ell)ds.$$

が成立する。

3 確率偏微分方程式

(μ, H, B) を抽象 Wiener 空間とする。この時 $W = C([0,\infty); B)$ 上の確率測度 P で以下の条件を満たすものが存在する。
(1) $\{_B< w(t), u >_{B^*};\ t \geq 0, u \in B^*\}$ は平均ゼロのガウス系をなす。
(2) $E^P[_B< w(t), u >_{B^*}\ _B< w(s), v >_{B^*}] = (t \wedge s)(u,v)_{H^*}, \qquad t, s \geq 0, u, v \in B^* \subset H^*.$

$\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s); s \leq t\}$, $t \geq 0$ とおく。$p \in (2,\infty)$, $\alpha \in (0, 1/2)$, $C_0, C_1 > 0$ は定数で $p(1/2-\alpha) > 1$ を満たすものとする。$\sigma : C([0,\ell]) \times [0,\ell] \to H^*$ は可測写像で以下の条件を満たすものとする。
任意の $f, f' \in C([0,\ell])$ に対して

$$(\int_0^\ell \|\sigma(f,z) - \sigma(f',z)\|_{H^*} dz)^{1/p} \leq C_0(| f(\ell) - f'(\ell) | + (\int_0^\ell | f(z) - f'(z) |^p\, dz)^{1/p})$$

$$\|\sigma(f,\ell) - \sigma(f',\ell)\|_{H^*} \leq C_0(| f(\ell) - f'(\ell) | + (\int_0^\ell | f(z) - f'(z) |^p\, dz)^{1/p})$$

$$(\int_0^\ell \int_0^\ell | z - z' |^{-2-p\alpha}\, \|\sigma(f,z) - \sigma(f,z')\|_{H^*} dz dz')^{1/p}$$

$$\leq C_0(1 + (\int_0^\ell \int_0^\ell | z - z' |^{-2-\alpha p} | f(z) - f(z') |^p\, dz dz')^{1/p}), \qquad f \in C([0,\ell])$$

$$\|\sigma(f,z)\|_{H^*} \leq C_1, f \in C([0,\ell]), \qquad z \in [0,\ell]$$

が成立する。

また、$\sigma_0 : C([0,\ell]) \to H^*$ 及び $b_0 : C([0,\ell]) \to \mathbf{R}$ は以下の条件を満たす可測写像とする。
任意の $f, f' \in C([0,\ell])$ に対して

$$\|\sigma_0(f) - \sigma_0(f')\|_{H^*} \leq C_0(| f(\ell) - f'(\ell) | + (\int_0^\ell | f(z) - f'(z) |^p\, dz)^{1/p})$$

$$| b_0(f) - b_0(f') | \leq C_0(| f(\ell) - f'(\ell) | + (\int_0^\ell | f(z) - f'(z) |^p\, dz)^{1/p})$$

$$\|\sigma_0(f)\|_{H^*} \leq C_1$$

$$| b_0(f) | \leq C_1$$

が成立する。

この時次の定理が成立する。

定理 3.1 任意の連続関数 $\psi : [0,\ell] \to \mathbf{R}$ に対し $\mathcal{F}_t$-*adapted* な $C([0,\ell])$-値連続な確率過程 X で以下の条件を満たすものが存在する。
(1) $X(0,x) = \psi(x), \qquad x \in [0,\ell]$
(2) $\int_0^T E^P[(|X(t)(\ell)|^p + \int_0^\ell |X(t)(x)|^p dx] dt < \infty, \qquad T > 0,$
(3)

$$r(t,x) = X(t,x),$$
$$M(t,x) = \int_0^t \sigma(X(s),x)dW_s,$$
$$V(t,x,y) = (\sigma(X(t),x),\sigma(X(t),y))_{H^*}, \qquad t \geq 0, x,y \in [0,\ell],$$
$$\varepsilon(t) = \int_0^t \sigma_0(X(s))dW_s + \int_0^t b_0(X(s))ds,$$

とおくと、これらは前節の条件 (A-1),(A-2),(A-3),(A-4), を満たし、さらに

$$\int_0^t h^{-1}(r(s,\ell) - r(s,\ell - h))ds \to \varepsilon(t), \qquad h \downarrow 0,\ t \geq 0,$$

が成り立つ。また、このような確率過程 X は一意的に定まる。

形式的には上記の X は SPDE

$$\begin{aligned} & dX(t,x) \\ = \ & (\frac{\partial}{\partial x}X(t,x))dt + \sigma(X(t,\cdot),x)(dW_t + (\int_0^x \sigma(X(t,\cdot),y)dy)dt) \end{aligned}$$
$$X(0,x) = \psi(x)$$

の解である。

定理 3.2 ある正定数 $C_2 > 0$ があって、

$$\|\sigma(f,x)\|_H \leq C_2 \mid f(x) \mid, x \in [0,\ell],$$
$$\|\sigma_0(f)\|_H \leq C_2 \mid f(\ell) \mid,$$
$$b_0(f) \geq -C_2 \mid f(\ell) \mid$$

がすべての $f \in C([0,\ell])$, $f \geq 0$ に対して成立するとする。さらに、$\psi(x) > 0, x \in [0,\ell]$ とする。この時、前定理で与えられる確率過程 X は

$$P(X(t,x) > 0,\ (t,x) \in [0,\infty) \times [0,\ell]) = 1$$

を満たす。

上記の結果より、SPDE の解 X を金利とみなした場合、no arbitrage であることがわかる。

参考文献

[1] Duffie, D., Dynamic Asset Pricing Theory, 2ed., Princeton University Press, 1996
[2] Musiela, M., Stochastic PDEs and Term Structure Models, Preprint 1994